EPITA

S1

Mathématiques

Séminaire de rentrée

(8 septembre - 19 septembre 2025)

SÉMINAIRE DE RENTRÉE SEPTEMBRE 2025

Table des matières

ECUE **3**

Motivation **3**

Attendus **5**

I Logique **7**

1 Logique propositionnelle **7**
1.1 Résumé 7
1.2 Exercices 7
Exercice 1.1 7
Exercice 1.2 7
Exercice 1.3 8
Exercice 1.4 8
Exercice 1.5 8

II Ensembles **9**

2 Ensembles : définitions et opérations **9**
2.1 Résumé 9
2.2 Exercices 9
Exercice 2.6 9
Exercice 2.7 10
Exercice 2.8 10

3 Ensembles finis **10**
3.1 Résumé 10
3.2 Exercices 10
Exercice 3.9 10
Exercice 3.10 11

III Raisonnements **12**
3.3 Résumé 12
3.4 Comment rédiger ? 12
3.5 Exercices 13
Exercice 3.11 13
Exercice 3.12 13
Exercice 3.13 13
★ Exercice 3.14 14
Exercice 3.15 14
Exercice 3.16 14

IV Fonctions **15**

4 Image directe et réciproque **15**
4.1 Résumé . . . 15
4.2 Exercices . . . 15
Exercice 4.17 . . . 15
Exercice 4.18 . . . 16
Exercice 4.19 . . . 16
Exercice 4.20 . . . 16
Exercice 4.21 . . . 16

5 Injectivité et surjectivité **17**
5.1 Résumé . . . 17
5.2 Exercices . . . 17
Exercice 5.22 . . . 17
Exercice 5.23 . . . 17
Exercice 5.24 . . . 17
Exercice 5.25 . . . 18
★ Exercice 5.26 . . . 18

6 Relations **18**
6.1 Résumé . . . 18
6.2 Exercices . . . 19
Exercice 6.27 . . . 19
Exercice 6.28 . . . 19
★ Exercice 6.29 . . . 19

V Calcul intégral **20**

7 Résumé **20**

8 Exercices **20**
Exercice 8.30 . . . 20
Exercice 8.31 . . . 20
Exercice 8.32 . . . 20
Exercice 8.33 . . . 20
Exercice 8.34 . . . 21

ECUE

Le séminaire forme l'ECUE OBM : outils de base mathématiques, auquel s'ajoutera un travail en autonomie sur les nombres complexes au cours du premier bimestre.

Les prérequis pour cette feuille sont :
— Pour les trois premières parties, presque aucun. Connaitre les fonctions usuelles.
— Pour la partie « Calcul intégral » :

(a) Connaitre par cœur les dérivées et primitives usuelles.

(b) Manipuler et dériver les fonctions composées.

(c) Calculer une primitive en utilisant les primitives de référence et les fonctions de la forme $(v' \circ u) \times u'$.

(d) Calculer une intégrale en intégrant par parties.

Remarque :

Cet ECUE est un prérequis à tous les autres ECUE du cycle préparatoire pour les mathématiques.

Motivation

Certains d'entre vous considèrent aujourd'hui que les mathématiques consistent en une série de formules à apprendre par cœur ou d'antisèches à rentrer dans une calculatrice programmable, au service de l'apparition spontanée de résultats qui n'ont aucun sens mais qui rapportent quelques demi-points. Les plus cyniques iront même jusqu'à penser que le seul intérêt des mathématiques est de pouvoir devenir plus tard professeur de mathématiques et ainsi assurer la perpétuation d'une certaine tradition du sadisme.

Ces points de vue ne sont pas tout à fait corrects.

Les mathématiques sont d'abord ***l'art de faire des conjectures, d'essayer de les démontrer ou de les infirmer***, dans le but de ***mieux comprendre*** les phénomènes que l'on étudie et d'en ***prévoir*** les résultats. En ce sens, comme Monsieur Jourdain nous faisons tous des mathématiques [1] sans le savoir ! Les mathématiques forment une science qui repose sur le raisonnement plus que sur l'expérimentation, de par la manière dont elle est formalisée : on travaille à modifier des propriétés que l'on sait justes par des transformations qui gardent leur caractère correct, jusqu'à arriver à un résultat qui nous permette de conclure quant à notre recherche : c'est le côté « science exacte ». Cet aspect rigoureux ne doit cependant pas occulter la partie un petit peu expérimentale : ***il est important de tenter des choses***, de ne pas s'arrêter si le premier raisonnement n'est pas le bon (figure 1) ou si l'on n'a pas de manière immédiate un résultat définitif, et de ne pas hésiter à tester des cas particuliers avant de se lancer dans le cas général, ce qui parfois permettra de mettre en lumière une faille ou un contre-exemple et d'autres fois aidera à comprendre l'architecture sous-jacente d'un problème.

Pour tout cela il est important de savoir manipuler le langage des mathématiques et toutes les possibilités qu'il offre [2] : ce sera le but de la première partie consacrée à la logique.

Nous travaillerons ensuite sur les premiers exemples de constructions mathématiques. Nous introduirons ainsi brièvement le vocabulaire ensembliste. La plupart des environnements mathématiques que nous rencontrerons cette année sont des ensembles (l'univers en probabilités, l'ensemble des nombres entiers en arithmétique, l'ensemble des suites réelles, les espaces vectoriels). On s'autorisera dans ces ensembles des opérations entre éléments, des relations à définir entre éléments...

Un autre aspect dont l'importance est trop souvent sous-estimée est la capacité à savoir ***représenter*** les problèmes et plus généralement les objets : sous forme graphique, géométrique ou sous forme d'énoncés clairs et succincts. Il faut savoir faire cette mécanique de transcription dans les deux sens ; cela permet non seulement de se représenter mentalement les choses de manière plus simple, et ainsi

1. Et du français donc. Vous pourrez interroger votre enseignant de méthodologie à ce sujet.

2. « Ce que l'on conçoit bien s'énonce clairement
Et les mots pour le dire arrivent aisément. »
Encore un peu de boulot pour votre professeur de méthodo :-p

FIGURE 1 – Les Shadoks, de Jacques Rouxel



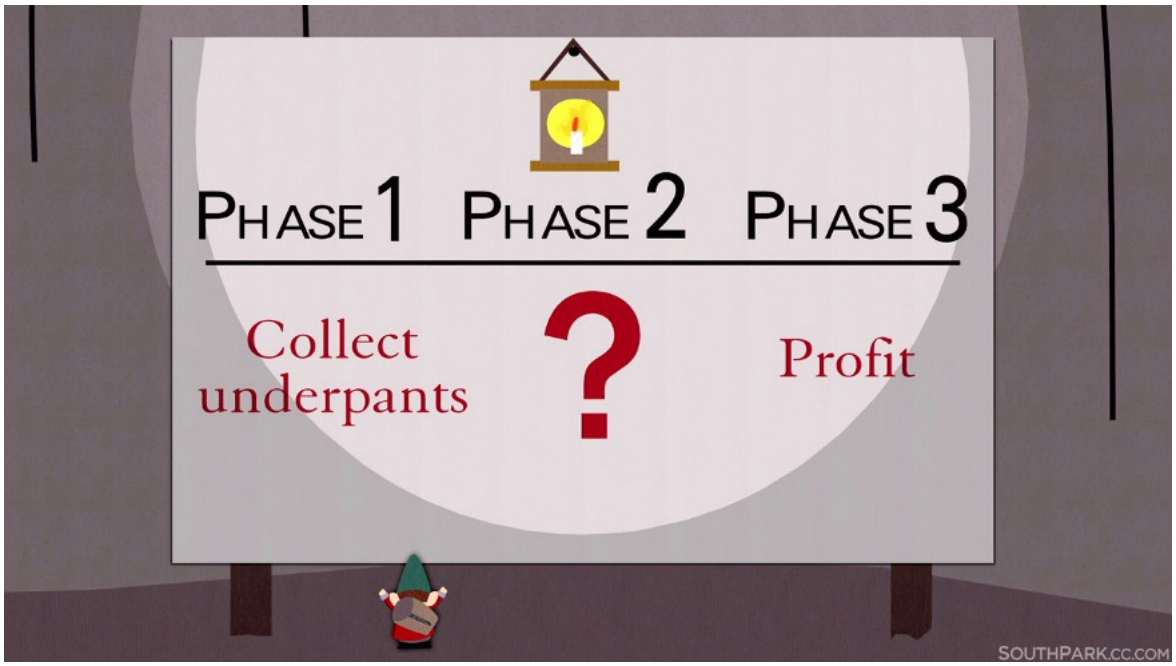


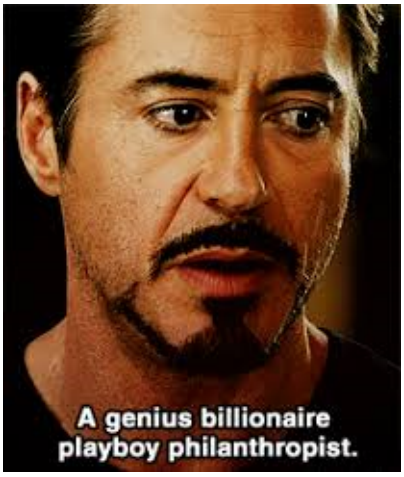
FIGURE 2 – Être capable de présenter un graphe clair peut aider à faire comprendre un raisonnement, voire à pointer des failles dans un plan qui paraissait pourtant parfait (SOUTH PARK : Gnomes business plan).

de pouvoir imaginer des structures plus complexes, mais il est souvent plus facile d'avoir une idée d'exemple ou de contre-exemple comme quelque chose que l'on peut dessiner. Sans négliger l'aspect communication : un ingénieur en informatique sera amené à présenter des idées sur des objets assez complexes, il sera nécessaire pour cela d'être capable de condenser les notions importantes sur des schémas simples et clairs (figure 2). Nous travaillerons donc cet aspect de représentation en imaginant plusieurs manières de dessiner des problèmes et en discutant de leurs avantages et inconvénients respectifs.

La partie « Fonctions » introduira le vocabulaire fonctionnel. Il fait écho au typage fort que vous étudiez actuellement avec `CamL`. C'est d'ailleurs un exemple des correspondances que vous retrouverez toute l'année entre les mathématiques et l'algorithmique : il ne sera pas rare d'aborder un même problème sous les deux aspects, et ce de manière complémentaire. En effet, que serait un ingénieur en informatique sans une formation solide en mathématiques ?

Enfin, dans la toute dernière partie de cette feuille, nous prenons le parti de changer un peu de sujet

et de nous attarder sur un outil mathématique déjà croisé au lycée : les intégrales (histoire de souffler un peu... ou pas). Vous en aurez souvent besoin, y compris dans d'autres matières. Elles permettent notamment de calculer des aires.



Attendus

Voilà les AAV (Acquis d'apprentissage visés) détaillés pour cette partie séminaire. Au final, vous devez être capable de :

1. Partie « logique » :
   — Reconnaître les connecteurs logiques dans une assertion.
   — Utiliser les quantificateurs universel et existentiel.
   — Traduire une assertion en syntaxe mathématique et les combiner pour créer de nouvelles assertions.
   — Formuler la négation et la contraposée d'une implication, en langage mathématique comme en langage courant.
2. Partie « ensembles »
   — Utiliser correctement le vocabulaire ensembliste en particulier distinguer les symboles d'appartenance et d'inclusion.
   — Manipuler les opérations sur les ensembles et les sous-ensembles : inclusion, union, intersection, complémentaire, partition, produit cartésien.
   — Pour les ensembles finis, calculer le cardinal d'un ensemble, d'une union, d'un produit cartésien ou de l'ensemble des parties d'un ensemble.
3. Partie « Raisonnements »
   — Démontrer une propriété simple par preuve directe,par contraposée, par l'absurde ou par récurrence.
   — Démontrer une inclusion ou une égalité d'ensembles.
4. Partie « fonctions »
   — Démontrer qu'une fonction usuelle ou une fonction définie par un graphe est injective, surjective ou bijective.
   — Modifier les ensembles de départ et d'arrivée pour rendre une fonction (usuelle ou une fonction définie par un graphe) injective, surjective ou bijective.
   — Déterminer l'image ou l'image réciproque d'un ensemble par une fonction usuelle ou une fonction définie par un graphe.
   — Découvrir la fonction arctan comme fonction réciproque de la fonction tangente. Dessiner l'allure et trouver des valeurs remarquables
   — Déterminer si une relation est d'équivalence ou d'ordre et la représenter graphiquement
5. Partie « Calcul intégral »

— Calculer directement une primitive en reconnaissant une forme usuelle.
— Calculer une intégrale via une intégration par parties en décidant de qui on dérive et qui on intègre.
— Calculer une intégrale à l'aide d'un changement de variable que sera donné.

Quelques consignes et explications

On vous le dira, redira, re-redira, rabâchera : **vous devez apprendre votre cours par cœur.** C'est votre priorité. Vous ne réussirez pas (plus) à faire les exercices sans une connaissance approfondie du cours ! Et il faut s'y mettre dès votre premier jour à l'EPITA.

Dans cette feuille, les exercices indiqués « **(Maison)** » sont des exercices supplémentaires à faire en autonomie chez vous ou pendant vos séances d'étude à la fin de chaque journée. Ils ne seront pas forcément corrigés en classe par le professeur...

Les exercices étoilés ($\star$) sont souvent plus difficiles. Ils sont pour les étudiants qui ont très bien compris le reste de la feuille de TD et qui veulent aller plus loin. Ils ne seront pas corrigés en classe. Mais rien ne vous empêche de demander de l'aide à votre professeur si vous n'y arrivez pas....

Première partie
Logique

Cette première partie consacrée à la logique présente les rudiments de la ***formalisation***, c'est-à-dire la manière de transposer des propriétés venant d'intuitions ou du langage parlé en objets mathématiques sur lesquels on va pouvoir opérer des modifications selon des règles préétablies. Pour cela, nous allons doter notre langage d'un alphabet (un ensemble de caractères), de règles de syntaxe (la manière d'agencer ces caractères pour obtenir du sens) et des opérations qui nous permettront de faire évoluer le sens tout en gardant la correction syntaxique.

1 Logique propositionnelle

1.1 Résumé

La logique propositionnelle définit des règles et des usages concernant la manipulation de la syntaxe mathématique. Elle nous permet alors de bâtir des phrases traduisant des idées de plus en plus compliquées à l'aide de connecteurs logiques. Dans la logique de tiers exclu que nous utiliserons, il est possible d'évaluer toute expression obtenue afin de déterminer sa valeur booléenne – vraie ou fausse – en fonction des valeurs des propositions élémentaires qui la composent.

Cette possibilité d'évaluation n'est pas le seul intérêt de cette partie : vous vous rendrez compte que les constructions que nous allons utiliser ici seront reprises quasiment à l'identique pour définir les opérations sur les ensembles qui formeront la seconde partie de ce séminaire.

1.2 Exercices

Exercice 1.1

Soit x un réel. On considère les assertions :

$$P :\text{« } x \leq 1 \text{ »}, \; Q : \text{« } -1 < x \leq 2 \text{ »} \text{ et } R :\text{« } 0 \leq x < 4 \text{ »}$$

1. Si $x = -3$, quelles sont les assertions vraies parmi P, $\neg Q$, $\neg Q \vee R$, $\neg Q \wedge R$, $\neg P \wedge Q$, $\neg R \wedge P$?
2. **(Maison)** Mêmes questions si $x = 3$.
3. Comparer le domaine de vérité de $P \vee (Q \wedge R)$ et $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.
4. **(Maison)** Comparer le domaine de vérité de $P \wedge (Q \vee R)$ et $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.

Exercice 1.2

Les questions sont indépendantes.

1. Donner une condition nécessaire (par forcément suffisante) à « J'ai eu mon BAC ». De même, donner une condition suffisante (par forcément nécessaire) à « J'ai eu mon BAC ».
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Mettre le symbole $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$ ou $\Longleftrightarrow$ à la place des pointillés :

   (a) $x^2 > 4 \; \ldots\ldots \; x > 2$ **(b)** $x = \pi \; \ldots\ldots \; \sin(x) = 0$ **(c)** $\sqrt{x^2} = 1 \; \ldots\ldots \; x = 1$

   (d) $\dfrac{x^2}{3} = 0 \; \ldots\ldots \; x = 0$ **(e)** $e^{x+1} = 1 \; \ldots\ldots \; x = -1$ **(f)** $x < 1 \; \ldots\ldots \; |x| < 1$
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère l'assertion P : « $x^2 > 1 \Longrightarrow$ ($x < -1$ ou $x > 1$) ». Écrire la négation et la contraposée de P.

Exercice 1.3

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Traduire les propriétés suivantes en syntaxe mathématique :
   (a) f est bornée.
   (b) f ne s'annule jamais.
   (c) f est constante.
   (d) f est périodique.
   (e) f n'est pas la fonction nulle.
   (f) f est positive sur $\mathbb{R}^+$ (de deux manières : avec un quantificateur d'une part, avec une implication d'autre part).
2. Écrire la négation de toutes les propriétés ci-dessus.

Exercice 1.4

Pour chacune des assertions suivantes, spécifier si l'assertion est vraie ou fausse, puis écrire sa négation.

1. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \exists\, y \in \mathbb{R}, \quad x + y > 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}, \quad x + y > 0$
3. $\exists\, y \in \mathbb{R}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x + y > 0$
4. $\exists\, x \in \mathbb{R}, \quad \exists\, y \in \mathbb{R}, \quad x + y > 0$

Exercice 1.5

Écrire la négation des phrases suivantes, sachant que le terme « certains » signifie ici « au moins un ».

1. « Cette maison est grande ».
2. « Toutes les vérités sont bonnes à dire ».
3. « Certains étudiants s'endorment en cours de maths ! ».
4. « Aucune piste criminelle n'est écartée ».
5. « Certains poissons ne sont pas rouges ».
6. « S'il fait beau alors je vais à la plage ».
7. « Tu peux sortir si et seulement si tu fais tes devoirs ! ».
8. **(Maison)** « Tous les chats sont gris »
9. **(Maison)** « Certains étudiants ne s'endorment pas en cours de maths »
10. **(Maison)** « Si je me couche tard alors je ne vais pas en cours de maths »
11. **(Maison)** « $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}, x > y \implies x^2 > y^2$ ». De plus, cette assertion est-elle vraie ou fausse ?
12. **(Maison)** « $\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R}, y > x$ ». De plus, cette assertion est-elle vraie ou fausse ?

Deuxième partie
Ensembles

Cette partie a pour but de compléter la précédente en rajoutant une chose essentielle dans toute langue : le vocabulaire. On va introduire les objets et relations de base dont l'on se servira pour écrire les propriétés mathématiques que l'on utilisera et démontrera au cours de l'année.

Les ensembles sont le premier type de construction mathématique. La plupart des environnements mathématiques que l'on utilisera sont des ***structures algébriques***, c'est-à-dire des ensembles dans lesquels on autorise des opérations [3] entre éléments ; les ensembles jouent donc ce rôle d'univers dans lequel on va raisonner. Mais à une échelle plus simple, ce sont des objets que l'on va manipuler comme tels.

La relation d'appartenance est la manière de caractériser un ensemble : on peut la voir comme une fonction sur un univers d'éléments à valeurs booléennes : vrai si l'élément appartient à l'ensemble, faux s'il ne lui appartient pas. Elle permet d'écrire des premières assertions sur les éléments et les ensembles, et toutes les opérations que l'on va manipuler sur les ensembles peuvent être exprimées comme des connexions logiques impliquant des relations d'appartenance.

2 Ensembles : définitions et opérations

2.1 Résumé

On commence par évoquer les différentes manières de définir un ensemble. Il faut remarquer qu'à l'aide de la relation d'appartenance, on peut définir des opérations qui prolongent les connecteurs logiques utilisés sur les assertions d'appartenance : le complémentaire pour la négation, l'union pour la disjonction et l'intersection pour la conjonction. Ainsi, ces connecteurs logiques d'une part, opérations ensemblistes d'autre part vérifieront les mêmes règles de calcul.

D'autres opérations usuelles sont à ranger sur un plan différent. Le produit cartésien de deux ensembles crée un ensemble qui n'a en quelque sorte "pas le même type" que les deux ensembles de base : il s'agit d'un ensemble contenant des couples (des paires orientées).

Enfin, l'ensemble des parties d'un ensemble est celui qui regroupe tous les sous-ensembles de l'ensemble choisi. C'est un ensemble d'ensembles, on pourra utiliser de telles constructions en dénombrement ou plus tard pour des démonstrations exhaustives sur des structures plus compliquées.

2.2 Exercices

Exercice 2.6

1. Comparer les deux ensembles suivants : $E = \{n \in \mathbb{N}, \exists\, k \in \mathbb{N}, n = 2k\}$ et $F = \{2p, p \in \mathbb{N}\}$.
2. Écrire les ensembles suivants en extension, en compréhension (description conditionnelle) et par description paramétrique (quand cela s'y prête) :
   (a) L'ensemble des entiers naturels impairs strictement plus petits que 20.
   (b) L'ensemble des entiers strictement compris entre 2 et 30 et multiples de 4.
   (c) L'ensemble des solutions réelles de l'équation $(x-1)(x^2-5x+6) = 0$.
   (d) L'ensemble des réels compris entre -3π et 3π dont le sinus est nul.
3. Que signifient les ensembles suivants ? Pour chacun d'entre eux, donner des éléments qui y appartiennent et d'autres qui n'y appartiennent pas.
   (a) $E = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0\}$.
   (b) $F = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0\right\}$

3. Par exemple, si l'on considère l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels (écrits en base 10), on peut y adjoindre de nombreuses opérations binaires : addition, multiplication, concaténation... le choix d'un ensemble et de certaines opérations définit une structure.

(c) $G = \{x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R}, x = y^2\}$

4. Soit $A = [\![0, 10]\!]$. Mettre le symbole $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$ à la place des pointillés

a) $-1 \ \ldots\ A$, **b)** $2 \ \ldots\ A$, **c)** $\emptyset \ \ldots\ A$, **d)** $\{5\} \ \ldots\ A$, **(e)** $\{3\} \ \ldots \{1, 2, 3\}$, **(f)** $\{3\} \ \ldots\ \mathcal{P}(A)$.

Exercice 2.7 ***(Maison)***

On considère les ensembles $A = \{x \in \mathbb{R}, -1 < x < 10\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N}, n + 1 \leq 8\}$.

1. De quel ensemble commun de référence A et B sont-ils deux sous-ensembles ?
2. Dans chacune des phrases suivantes, remplacer les pointillés afin de la rendre vraie (remplacer les pointillés par $\emptyset$ est interdit).

Exemple : pour $\cdots\cdots \in B$*, on peut remplacer les pointillés par* 0 *car* $0 \in B$*.*

(a) $\cdots\cdots\cdots \in A$ **(b)** $\cdots\cdots\cdots \notin A \cup B$ **(c)** $\cdots\cdots\cdots \subset A \cup B$ **(d)** $\cdots\cdots\cdots \in A \cap B$ **(e)** $\cdots\cdots\cdots \subset A \times B$.

3. Quel est le complémentaire de B dans $\mathbb{Z}$?

Exercice 2.8

On considère les trois sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$: $A = [0, 3]$, $B =]-1, 10]$ et $C = [2, 20]$.

Trouver $A \cap B$, $A \cup B$, $(A \cup C) \cap B$, $(A \cap B) \cup (C \cap B)$, $(A \cap C) \cup B$ et $\overline{A} \cup C$.

Faire le lien avec les connecteurs logiques vus dans la première partie.

3 Ensembles finis

3.1 Résumé

Les ensembles finis sont ceux qui sont le plus faciles à utiliser : on peut en effet réduire leur étude à une énumération exhaustive (par force brute) des cas de figure rencontrés lors des diverses opérations utilisées. De nombreux problèmes algorithmiques reviennent à compter les éléments d'un ensemble ; il faut donc savoir modéliser le problème, c'est-à-dire identifier l'ensemble pertinent, puis réussir à effectuer le décompte de ses éléments : ce sera le sujet du chapitre sur le dénombrement qui suivra ce séminaire.

Même sans avoir un décompte exact, il peut être utile de trouver un ordre de grandeur ou une approximation (minoration, majoration, encadrement) de la taille d'un problème donné : cela peut aider à résoudre certains problèmes matériels comme la gestion de la capacité, la mise en œuvre d'une certaine quantité de ressources, le temps nécessaire etc. À défaut d'un compte exact parfois pénible à trouver, il suffit parfois d'une bonne approximation facile à calculer, ce genre de compromis est à l'origine de nombreuses discussions algorithmiques.

3.2 Exercices

Exercice 3.9

Considérons les ensembles $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{a, b\}$ où $(a, b) \notin \{1, 2, 3\}^2$.

1. Exprimer les ensembles $E \times F$ et $F \times E$. Combien ces ensembles ont-ils d'éléments ? Combien ont-ils d'éléments en commun ?
2. Exprimer $\mathscr{P}(E)$ et $\mathscr{P}(F)$. Pour un ensemble X quelconque, peut-on intuiter quelque chose sur le nombre d'éléments de $\mathscr{P}(X)$ par rapport à celui de X ?

Exercice 3.10

1. Soient E et F deux ensembles finis disjoints. Que vaut $\text{Card}(E \cup F)$?

   Remarque : quand les ensembles E et F sont disjoints, l'union se note aussi : $E \sqcup F$.

2. Soit E un ensemble fini. Rappeler ce qu'est une partition de E.

3. Soient A et B deux ensembles finis non disjoints.

   Représenter sous forme de patates ces deux ensembles.

   Exprimer le cardinal de $A \cup B$ selon les cardinaux des ensembles de la partition réalisée, puis en fonction des cardinaux de A, B et $A \cap B$.

4. Une classe de l'EPITA est composée de 40 étudiants. On a compté que dans cette classe :
   - Tous les étudiants parlent au moins une des deux langues, anglais ou espagnol.
   - 35 d'entre eux parlent anglais.
   - 20 d'entre eux parlent espagnol.

   Combien d'étudiants parlent à la fois l'anglais et l'espagnol ?

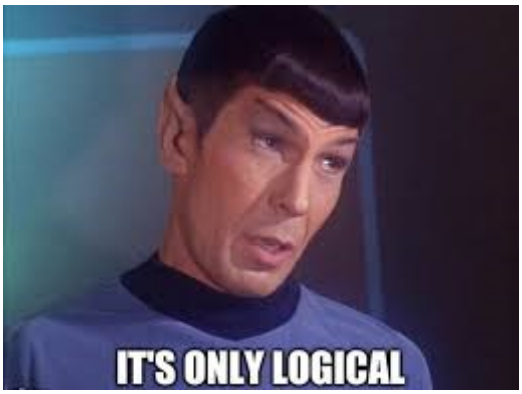
Troisième partie
Raisonnements

3.3 Résumé

Cette section présente différents types de raisonnement qui aident à prouver la véracité de propriétés mathématiques. Il est en effet rare qu'il n'y ait qu'une seule manière d'arriver à un résultat ; il importe donc d'être capable de savoir quelle démarche utiliser de préférence en fonction des données dont on dispose.

— Le raisonnement direct utilise des implications successives pour arriver au résultat voulu en partant des hypothèses.
— La démarche de la preuve par contraposée consiste à démontrer la contraposée de la proposition voulue, sachant que celle-ci lui est équivalente. Cela peut amener à une reformulation de l'énoncé plus simple à manipuler.
— La preuve par l'absurde consiste à montrer qu'un résultat est faux en prouvant qu'il impliquerait quelque chose que l'on sait être irréalisable. Pour prouver qu'un résultat est vrai, on peut ainsi montrer par l'absurde que sa négation est fausse.
— Le raisonnement par récurrence repose sur deux résultats : la propriété est vraie à un endroit donné, et de là elle se propage « de proche en proche ». Nous étudierons essentiellement des récurrences sur l'ensemble des entiers naturels, mais ce n'est là qu'un cas particulier de preuve par induction [4].

Il est nécessaire de faire le lien entre ce dernier type de raisonnement et la récursivité que vous étudiez en ce moment en algorithmique : savoir écrire une fonction récursive ou une preuve par récurrence, c'est peu ou prou la même démarche ...



3.4 Comment rédiger ?

Voilà les règles à respecter pour démontrer certaines propriétés.

Cas où il faut démontrer « $\forall x \in E$, $P(x)$ »

La première ligne de la démonstration doit être : Soit $x \in E$ fixé.

On prend ensuite un brouillon et on analyse ce qu'il faut démontrer pour savoir comment commencer : de quelle information partir pour arriver au résultat ?

Puis, on reprend sa copie avec le « Soit $x \in E$ » et on écrit un raisonnement logique en utilisant des implications successives. Si pour ce $x \in E$, $P(x)$ est démontrée, c'est donc que la propriété est vraie quelque soit $x \in E$.

4. On peut bien évidemment imaginer étendre le processus à des récurrences sur $\mathbb{Z}$; vous verrez plus tard des récurrences sur des ensembles moins évidents, avec des relations de propagation différentes.

Cas où il faut démontrer « $P \Longrightarrow Q$ »

La première ligne de la démonstration doit être : Supposons la propriété P vraie.

On cherche alors, par implications successives à montrer que la propriété Q est vraie. Ainsi, si P est vraie alors Q est vraie. Donc $P \Longrightarrow Q$.

Cas où il faut démontrer « $P \Longleftrightarrow Q$ »

Cela se fait le plus souvent en deux temps. On montre d'une part que $P \Longrightarrow Q$ et d'autre part que $Q \Longrightarrow P$.

Cas où il faut démontrer une inclusion d'ensembles « $A \subset B$ »

Elle signifie que : $\forall\, x \in A, x \in B$.

La première ligne de la démonstration doit être : Soit $x \in A$ fixé.

Puis, pour ce $x \in A$, on cherche par implications successives à montrer que $x \in B$. Si c'est le cas, on a prouvé qu'un élément quelconque de A est dans B, donc que tous les éléments de A sont dans B.

Cas où il faut démontrer une égalité d'ensembles « $A = B$ »

Cela se fait le plus souvent en deux temps. On montre d'une part que $A \subset B$ et d'autre part que $B \subset A$.



Dernier point : une démonstration se rédige ! ! Il faut utiliser des liens entre les différentes lignes. Cela peut être des symboles mathématiques ou tout simplement des mots comme « alors », « ainsi », « or », « d'où », « donc » etc...

3.5 Exercices

Exercice 3.11

1. Montrer que $\forall\, (x, y) \in]0, 1[^2,\ 0 < \dfrac{x+y}{1+xy} < 1$.

   Indication : après en avoir trouvé le signe, développer $(1-x)(1-y)$.
2. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, (6 divise n) $\Longrightarrow$ (3 divise n). La réciproque est-elle vraie ?
3. Montrer que : $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ x^2 + y^2 = 0 \iff x = y = 0$.
4. Soient A l'ensemble des fonctions constantes et B l'ensemble des fonctions paires. Montrer que $A \subset B$. A-t-on $A = B$?
5. Soient $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x + y = 4\}$ et $B = \{(t-1, 6-2t),\ t \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $A = B$.

Exercice 3.12

Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant un raisonnement par contraposée, montrer que si n^2 est pair, alors n est pair.

Exercice 3.13

Montrer par l'absurde que $\dfrac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

★ **Exercice 3.14**

En utilisant le résultat de l'exercice 3-12, montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Indice : on utilisera le fait qu'un nombre rationnel positif peut s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ où p est positif, q est strictement positif et p et q sont premiers entre eux, c'est-à-dire n'ont aucun diviseur positif en commun excepté 1.

Exercice 3.15

1. Par récurrence, montrer que : $\forall\, n \in [\![6, +\infty[\![,\ 2^n \geq 6n + 7$
2. Par récurrence, montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
3. Soit $f : x \mapsto xe^x$ dérivable une infinité de fois sur $\mathbb{R}$ et $x \longmapsto f^{(n)}(x)$ la dérivée n-ième de f $(n \in \mathbb{N})$.

   Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}\ f^{(n)}(x) = (x + n)e^x$.

Exercice 3.16 ***(Maison)***

1. Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2 \quad [x < y \Longrightarrow \exists\ q \in \mathbb{Q},\ x < q < y]$
2. Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall\, x \in [0, 2]$, $f(x) \in [1, 2]$ et (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0,5 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

   Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0, 2]$
3. Soit a un réel positif. Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a^n + na^{n-1} \leq (a + 1)^n$.
4. Montrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \ldots + \frac{1}{n \times (n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$

Quatrième partie
Fonctions

Si la définition formelle d'une fonction correspond à celle d'un graphe entre deux ensembles vérifiant certaines propriétés, de manière plus intuitive on peut voir ça comme une transformation opérée sur les éléments de l'ensemble de départ, ou comme une correspondance réalisée entre les deux ensembles. Vous programmez déjà des objets appelés fonctions en `CamL` ; il s'agit d'objets qui prennent un argument pour renvoyer un résultat.

Les relations entre deux éléments d'un même ensemble E (comme la relation d'égalité,la relation "inférieure ou égale", la relation d'inclusion entre parties d'un même ensemble ...) peuvent être vues comme des fonctions de $E \times E$ dans l'ensemble des booléens. On distinguera, parmi ces relations, deux types particuliers de relations : les relations d'ordre et d'équivalence, qui permettent de décrire de manière simple une architecture de l'ensemble E. Ce sont les cas particuliers les plus simples d'une architecture de graphe entre les éléments.

4 Image directe et réciproque

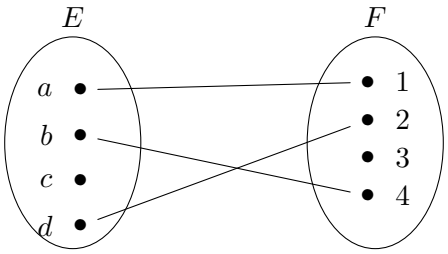
4.1 Résumé

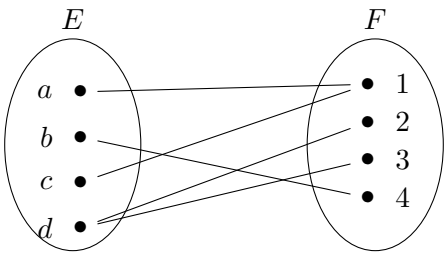
Les concepts d'image et d'image réciproque, que vous connaissez pour des éléments, peuvent être étendus à des ensembles. Vous devrez faire attention aux notations assez similaires ; il ne s'agit pas vraiment d'appliquer la fonction à un ensemble mais de s'intéresser à l'ensemble des valeurs que l'on peut obtenir en prenant un élément de départ dans la partie choisie. De même, la notation pour l'image réciproque ne veut pas dire que la fonction est une bijection réciproque.

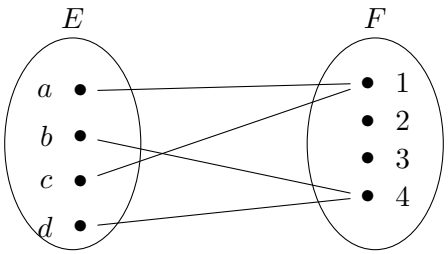
4.2 Exercices

Exercice 4.17

Parmi les dessins suivants, quels sont ceux qui représentent une fonction de E vers F ?

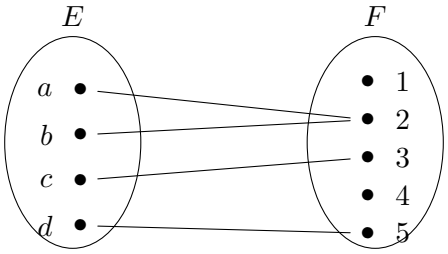






Exercice 4.18

Soit la fonction $f : \{a, b, c, d\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dont le graphe est le suivant :



Trouver : $f(\{a, b, c\})$, $f(\{a, b, c, d\})$, $f^{-1}(\{2, 3\})$ et $f^{-1}(\{1, 5\})$.

Exercice 4.19

Pour chacune des propriétés suivantes, dessiner le graphe d'une fonction f de $[\![1, 4]\!]$ dans $[\![1, 5]\!]$ qui la vérifie.

1. $f([\![1, 4]\!]) = \{1, 4\}$
2. $f^{-1}(\{3, 4\}) = \{1, 2\}$
3. $f(\{1, 2, 3\}) = \{3\}$ et $f^{-1}(\{3, 5\}) = \{1, 2, 3\}$.
4. $f^{-1}(\{2\}) = \{2, 3\}$ et $f(\{1, 2\}) = \{1, 2\}$.

Exercice 4.20

Considérons dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ les deux fonctions $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x$, $g : x \longmapsto x^2$ et sur $[-\pi, \pi]$ la fonction $h : x \longmapsto \sin(x)$.

1. Représenter graphiquement ces trois fonctions.
2. Déterminer :
   — $f(\mathbb{R})$ et $f^{-1}(\{0\})$;
   — $g([-1, 4])$ et $g^{-1}([-1, 4])$;
   — $h([-\pi, \pi]), h([0, \pi/2]), h^{-1}([0, 1]), h^{-1}([1, 2])$ et $h^{-1}([3, 4])$.

Exercice 4.21 ***(Maison)***

Compléter le tableau suivant.

N.B. : nous vous conseillons de dessiner le graphe des fonctions concernées au brouillon !

f	$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$	$\sin : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$	$\ln :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
$f(\{0\})$			
$f(\,]0, \pi]\,)$			
$f^{-1}(\{0\})$			
$f^{-1}(\{1\})$			
$f^{-1}(\,]-\infty, 0])$			

5 Injectivité et surjectivité

5.1 Résumé

L'injectivité et la surjectivité sont deux propriétés fonctionnelles qui n'ont rien en commun : elles portent sur des aspects différents des fonctions. Cependant, elles présentent une bonne complémentarité d'où leur étude simultanée.

Une fonction est injective si elle n'envoie jamais deux éléments différents vers la même image ; cela implique que la connaissance du résultat $f(x)$ permet de retrouver x. Une fonction injective possède donc un côté "réversible" : on peut déduire la donnée de départ du résultat final. L'injectivité est donc fortement liée au domaine de départ de la fonction : on peut restreindre une fonction quelconque à une fonction injective en supprimant tous les "doublons", c'est-à-dire en ne gardant qu'un antécédent pour chaque valeur atteinte.

Une fonction est surjective si elle atteint toutes les valeurs de son ensemble d'arrivée. Celui-ci est donc exactement l'image du domaine de la fonction, ce qui évite les données superflues en sortie. C'est par exemple une bonne propriété pour une table de hachage qui veut répartir des valeurs sur le plus de cellules possible.

Enfin, une fonction à la fois injective et surjective est dite bijective. C'est donc une fonction qui opère une transformation réversible entre deux ensembles ; on verra que l'existence d'une bijection entre deux ensembles implique des liens forts entre eux.

5.2 Exercices

Exercice 5.22

Discuter de l'injectivité et la surjectivité de la fonction $\left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ dans les cas suivants :

1. $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$
2. $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}^+$
3. $E = \mathbb{R}^+$ et $F = \mathbb{R}$
4. $E = \mathbb{R}^+$ et $F = \mathbb{R}^+$

Exercice 5.23

1. Construire une fonction injective de $[\![1, 4]\!]$ vers $[\![1, 5]\!]$. Votre fonction peut elle être surjective ?
2. Construire une fonction surjective de de $[\![1, 4]\!]$ vers $[\![1, 3]\!]$. Votre fonction peut elle être injective ?
3. En vous inspirant de vos exemples précédents, construire une fonction bijective.

Exercice 5.24

1. Soient f, g et h les fonctions de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = x + 1 \quad \text{et} \quad h(x) = \cos(x).$$

   Expliciter $f \circ f, f \circ g, g \circ f$, $g \circ g$, $g \circ h$ et $h \circ g$.

2. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on considère $f : x \longmapsto 2x$, $g : x \longmapsto -2x$ et $h : x \longmapsto x^2$.
   Comparer $h \circ f$ et $h \circ g$. Que peut-on en déduire ?

3. Soient $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$. Quelle(s) composée(s) de fonctions peut-on faire ?

Exercice 5.25

Soient E et F deux ensembles et f une fonction bijective de E vers F. Montrer que :
f bijective de E vers $F \iff \forall\, y \in F,\ \exists !\, x \in E$ tel que $y = f(x)$.
On admet le résultat suivant :

Théorème : Soient E et F deux ensembles et $f \in F^E$.
f bijective $\iff \exists\, g : F \longrightarrow E$ telle que $\forall\, x \in E,\ g \circ f(x) = x$ et $\forall\, y \in F,\ f \circ g(y) = y$.
Si une telle fonction g existe, alors g est unique et on la note $g = f^{-1}$. On a ainsi, pour f bijective de E vers F :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & f(x) \\ x & \in & E \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & f^{-1}(y) \\ y & \in & F \end{array} \right.$$

et

$$\forall\, x \in E,\ f^{-1} \circ f(x) = x \ \text{ et } \ \forall\, y \in F,\ f \circ f^{-1}(y) = y$$

Le graphe de f^{-1} est obtenu du graphe de f par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Application : La fonction arctan**. À connaitre par cœur.**

1. Expliquer pourquoi la fonction tan est bijective de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$.
2. On peut créer alors sa fonction réciproque $\tan^{-1}$ que l'on note plutôt arctan.
   (a) Dessiner cette fonction.
   (b) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\arctan'(y) = \dfrac{1}{1+y^2}$.
   (c) Remplir le tableau suivant :

α	0		$\frac{\pi}{3}$			$-\frac{\pi}{4}$	$\arctan(x)$
$\tan(\alpha)$		1		$-\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$		x

3. Donner d'autres fonctions usuelles réciproques l'une de l'autre.

★ **Exercice 5.26**

On considère trois ensembles E, F et G ainsi que deux fonctions $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$.

1. Montrer que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.

6 Relations

6.1 Résumé

Dans cette partie on s'intéresse à deux types de relation entre éléments : les relations d'ordre et les relations d'équivalence. On les représentera le plus souvent par des graphes qui leur sont équivalents.

Les relations d'équivalence coupent l'ensemble E en plusieurs parties disjointes à l'intérieur desquelles tous les éléments sont connectés entre eux : il s'agit en quelque sorte de ranger les éléments dans des tiroirs, sachant que deux éléments d'un même tiroir auront les mêmes propriétés vis-à-vis de la relation qui nous intéresse. On les utilisera notamment en arithmétique (congruences) et en algèbre linéaire (diverses réductions matricielles).

Les relations d'ordre classent les éléments les uns par rapport aux autres. On distinguera les relations totales qui permettent toujours de comparer deux éléments donnés, et les relations partielles pour lesquelles une telle comparaison n'est pas toujours possible. Leur utilisation est omniprésente en mathématiques et en algorithmique : comparaisons et classement, topologie, graphes de flux, problèmes d'optimisation divers ...

6.2 Exercices

Exercice 6.27

On définit sur l'ensemble $[\![0,7]\!]$ la relation [5] R par : $\forall (x,y) \in [\![0,7]\!]^2$, $x \ R \ y \iff x-y$ est un multiple de 3

1. Montrer que R est une relation d'équivalence.
2. Dessiner son graphe représentatif. Que remarque-t-on ?

Exercice 6.28

1. (a) Montrer que la relation $\leqslant$ est une relation d'ordre total sur $[\![0,5]\!]$.
   (b) Dessiner son graphe et son diagramme de Hasse.
2. (a) Montrer que la relation $\subset$ est une relation d'ordre partielle sur $\mathscr{P}(\{1,2,3\})$.
   (b) Dessiner son graphe et son diagramme de Hasse.

★ **Exercice 6.29**

Sur l'alphabet latin $E = \{a, b, \ldots, z\}$ on définit l'ensemble E^* des mots [6] composés de ces lettres. Dire si les relations suivantes sur E^* sont des relations d'ordre (total ou partiel) ou d'équivalence. Soient m et m' deux mots quelconques de E^* :

1. $m \ R_1 \ m'$ si les mots m et m' ont la même longueur (nombre de lettres) ;
2. $m \ R_2 \ m'$ si m est rangé avant m' dans un dictionnaire (ordre alphabétique ou lexicographique) ;
3. $m \ R_3 \ m'$ si m est un sous-mot de m', c'est-à-dire si l'on peut trouver deux mots n et p, éventuellement vides, tels que m' soit la concaténation $n \cdot m \cdot p$.
   Par exemple : **math** est un sous-mot de *trau***math***isme* [7].

5. Il s'agit de la relation de congruence modulo 3.
6. C'est-à-dire des chaînes de caractères de n'importe quelle longueur.
7. En français on écrit « traumatisme » sans h. Remarquez que les chaînes de caractère que l'on utilise dans cet exercice ne sont pas les mots valides en français mais n'importe quelle suite finie de lettres.

Cinquième partie
Calcul intégral

7 Résumé

Depuis longtemps, les mathématiciens calculent des aires de certaines figures planes, telles que les polygones réguliers, en les décomposant en triangles. La question du calcul d'une aire d'une surface plane délimitée par un bord courbe de moins en moins régulier s'est alors posée. Le concept d'intégrale est né.

Dans un repère orthonormé, l'intégrale d'une fonction f continue entre deux valeurs a et b représente l'aire délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. Une méthode d'approximation d'une intégrale vous a été expliquée en Terminale, celle des rectangles. Cette méthode consiste à partager l'intervalle $[a, b]$ en plusieurs intervalles de même longueur et de construire des rectangles « inférieurs » et « supérieurs » en dessous et au dessus de la courbe. Plus le découpage de $[a, b]$ est grand, plus on approche la valeur de l'intégrale.

Pour le calcul exact de l'intégrale, la notion de primitive (sorte d'opération inverse de la dérivée) a été introduite. L'intégrale d'une fonction continue f entre a et b est alors la différence entre la valeur en b d'une primitive de f et sa valeur en a.

Parfois, le calcul d'une intégrale ne peut pas se faire directement car on ne connait pas de primitive. Dans ce cas là, on a d'autres méthodes pour calculer l'intégrale : l'intégration par parties, formule qui découle directement de la dérivée d'un produit de fonctions et l'intégration par changement de variable.

8 Exercices

Exercice 8.30

Dériver formellement les fonctions f, g, h ci-dessous (sans se préoccuper du domaine de définition).

$$f(x) = \sin^{42}\Big(\ln\big(x\sin(x)\big)\Big) \qquad g(x) = \sqrt{\ln\Big(e^{x^2}+1\Big)} \qquad h(x) = \ln\Big(2^{\,x} - \sin\big(\sin(x)\big)\Big)$$

Exercice 8.31

A l'aide de primitives, calculer les intégrales ci-dessous.

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^2 3te^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^1 4t(2t^2+1)^4\,\mathrm{d}t.$
3. $I_3 = \displaystyle\int_1^e \frac{(\ln(t))^2}{t}\,\mathrm{d}t.$
4. $I_4 = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan(x)\mathrm{d}x$
5. $I_5 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2+1}{2\sqrt{t^3+3t}}\,\mathrm{d}t.$
6. $I_6 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,\mathrm{d}x.$
7. $I_7 = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)(1+\tan^2(x))\mathrm{d}x$
8. $I_8 = \displaystyle\int_0^1 \frac{2x^3+1}{(x^4+2x+1)^3}\mathrm{d}x$
9. $I_9 = \displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

Exercice 8.32

Énoncer et démontrer la formule d'intégration par parties.

Exercice 8.33

A l'aide d'une intégration par parties (IPP), calculer les intégrales ci-dessous.

1. $I = \displaystyle\int_0^1 (2x+3)e^{3x}\,\mathrm{d}x.$
2. $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos\left(\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x.$
3. $K = \displaystyle\int_1^e \ln(x)\,\mathrm{d}x.$
4. $L = \displaystyle\int_0^{\pi} x^2\sin(x)\,\mathrm{d}x.$
5. $M = \displaystyle\int_0^{\pi} e^x\sin(x)\,\mathrm{d}x.$
6. ★ $N = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$
7. ★ $O = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x.$

Exercice 8.34

Calculer, via le changement de variable indiqué, les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4x^2}{(2x+1)^2}\,\mathrm{d}x$ en posant $t = 2x+1$
2. $J = \displaystyle\int_0^{\ln(\sqrt{3})} \frac{\mathrm{d}t}{e^t + e^{-t}}$ en posant $x = e^t$
3. $K = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ en posant $t = \ln x$
4. $L = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+3)\sqrt{x+2}}$ en posant $t = \sqrt{x+2}$
5. $M = \displaystyle\int_0^4 e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ en posant $t = \sqrt{x}$
6. ★ $N = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin(t)\cos(t)}\mathrm{d}t$ en posant $x = \tan(t)$